

Gleichungssysteme und ihre Bedeutung für die Vektorrechnung

Gleichungssysteme und ihre Bedeutung für die Vektorrechnung								
1. Unterbestimmtes Gleichungssystem Weniger Gleichungen als Variablen			2. Gleichbestimmtes Gleichungssystem Genauso viel Gleichungen wie Variablen			3. Überbestimmtes Gleichungssystem Mehr Gleichungen als Variablen		
Beispiel: $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$ $4x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 6$ Strategie: Eine Variable durch Einsetzungs-, Gleichsetzungs- oder Additionsverfahren eliminieren. Dann für eine der verbleibenden Variable zum Beispiel t einsetzen und alle Variablen in Abhängigkeit von t berechnen. Siehe zuerst 1c.			Beispiel: $1x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1$ $3x_1 - 2x_2 + 1x_3 = 0$ $-1,5x_1 + 1x_2 - 0,5x_3 = 1$ Strategie: Lösen mit Matrizenschreibweise			Beispiel: $3x_1 + 2x_2 = 4$ $4x_1 + 8x_2 = 6$ $2x_1 + 8x_2 = 8$ Gesucht sind also zwei Variablen, die alle Drei Bedingungen erfüllen. Strategie: Mit zwei Gleichungen die beiden Variablen ausrechnen. Dann die Probe mit der dritten Gleichung machen.		
1.a Keine Lösung	1.b Eine Lösung	1.c Unendlich viele Lösungen	2.a Keine Lösung	2.b Eine Lösung	2.c Unendlich viele Lösungen	3.a Keine Lösung	3.b Eine Lösung	3.c Unendlich viele Lösungen
$-3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 5$ $2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -2$ $-6x_1 + 12x_2 - 12x_3 = 10$ $6x_1 - 12x_2 + 12x_3 = -6$ Beide Gleichungen addiert. $0 = 4$ Das ist eine unwahre Aussage, daher gibt es gar keine Lösung für dieses System.	Nicht möglich. Aber bei der Lösung muss nicht unbedingt Bei jeder Variablen t stehen: $-6x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 9$ $4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -6$ $-12x_1 - 6x_2 + 12x_3 = 18$ $12x_1 + 6x_2 - 15x_3 = -18$ $-12x_1 - 6x_2 + 12x_3 = 18$ $-15x_3 = 0$ In dem Fall ist $x_3 = 0$. Setze dann für $x_2 = t$. Alles in die oberste Gleichung eingesetzt: $-6x_1 - 3t + 6 \cdot 0 = 9$ $x_1 = -1,5 - 0,5t$	$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \quad \cdot (-2)$ $2x_1 - 4x_2 + x_3 = 6$ Hier Additionsverfahren: $-2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -2$ $2x_1 - 4x_2 + x_3 = 6$ $-2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -2$ $2x_2 - x_3 = 4$ $-2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -2$ $2x_2 = x_3 + 4$ $-2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -2$ $x_2 = 0,5x_3 + 2$ Setze nun für $x_3 = t$. Daraus folgt: $x_2 = 0,5t + 2$ und mit der obersten Gleichung: $x_1 - 3(0,5t + 2) + t = 1$ $x_1 - 1,5t - 6 + t = 1$ $x_1 - 0,5t = 7$ $x_1 = 7 + 0,5t$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & & 1 \\ 3 & -2 & 1 & & 0 \\ -1,5 & 1 & -0,5 & & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 & & 3 \\ 3 & -2 & 1 & & 0 \\ -3 & 2 & -1 & & 2 \end{pmatrix}$ Addiert man Zeile II und III, erkennt man schon das Ergebnis: $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 & & 3 \\ 3 & -2 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 2 \end{pmatrix}$ Da $0 = 2$ eine falsche Aussage ist, ist das System nicht lösbar. Das wäre auch so, wenn z.B. stehen würde: $4 = 3$. Vorsicht: Stünde hier $2 = 2$ bedeutet das nicht, dass es unendlich viele Lsg. gibt, sondern dass $x_3 = 1$ ist. Bei Einsetzungsverfahren, ... ist das anders.	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 & & -4 \\ 3 & 2 & 1 & & 0 \\ 1,5 & 5 & -5 & & -9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 & & -4 \\ 3 & 2 & 1 & & 0 \\ 3 & 10 & -10 & & -18 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 & & -4 \\ 0 & -4 & 3 & & 4 \\ 0 & 2 & -4 & & -7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 & & -4 \\ 0 & -4 & 3 & & 4 \\ 0 & 0 & -5 & & -10 \end{pmatrix}$ $-5x_3 = -10 \rightarrow x_3 = 2$ Ebenso folgt: $x_2 = 0,5$ $x_1 = -1$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & & 1 \\ 3 & -2 & 1 & & -2 \\ -1,5 & 1 & -0,5 & & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 & & 3 \\ 3 & -2 & 1 & & -2 \\ -3 & 2 & -1 & & 2 \end{pmatrix}$ Addiert man Zeile II und III erkennt man schon das Ergebnis: $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 & & 3 \\ 3 & -2 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$ Eine ganze Gleichung verschwindet, daher gibt es unendlich viele Lösungen. Weitere Berechnung, falls erforderlich, siehe „Überbestimmte Gleichungssysteme.“	Mit zwei Gleichungen kann man zwei Variablen errechnen. Diese passen dann aber nicht mehr in die dritte Gleichung. $2x_1 + 3x_2 = 16$ $-3x_1 + 5x_2 = 14$ $1x_1 + 2x_2 = 8$ $2x_1 + 3x_2 = 16$ $-3x_1 + 5x_2 = 14$ Ausrechnen wie im zweiten Fall: $x_1 = 2$ $x_2 = 4$ Probe in dritte Gleichung: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 8$ $9 = 8$ Falsch!	Mit zwei Gleichungen kann man zwei Variablen errechnen. Diese passen dann auch in die dritte Gleichung. $2x_1 + 3x_2 = 16$ $-3x_1 + 5x_2 = 14$ $1x_1 + 2x_2 = 9$ $2x_1 + 3x_2 = 16$ $-3x_1 + 5x_2 = 14$ Ausrechnen wie im zweiten Fall: $x_1 = 2$ $x_2 = 4$ Probe in dritte Gleichung: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 9$ $9 = 9$ Richtig!	$2x_1 + 4x_2 = 8$ $x_1 + 2x_2 = 4$ $4x_1 + 8x_2 = 16$ $2x_1 + 4x_2 = 8$ $x_1 + 2x_2 = 4$ Addieren: $0 = 0$ Setze für $x_2 = t$ Mit der zweiten Gleichung folgt: $x_1 + 2t = 4$ $x_1 = 4 - 2t$ Probe in III $4(4 - 2t) + 8t = 16$ $16 = 16$ Richtig!
$L = \{ \}$	$L = \{(-1,5 - 0,5t; t; 0); t \in \mathbb{R}\}$	$L = \{(7+0,5t; 0,5t+2; t); t \in \mathbb{R}\}$	$L = \{ \}$	$L = \{(-1; 0,5; 2)\}$		$L = \{ \}$	$L = \{(2; 4)\}$	$L = \{(4-2t; t); t \in \mathbb{R}\}$

Einige Beispiele für Aufgaben, die auf ein Gleichungssystem führen. Wer es vervollständigen möchte, kann mir weitere schicken.			
Aufgabe	Beispiel	Lösungsweg:	Art des Gleichungssystems
Schnittpunkt zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$	$g_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $g_2: \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	Gleichsetzen: $1 + 2r = 3 + s$ $2 + 3r = 2 + 2s$ $2r - s = 2$ $3r - 2s = 0$ Falls es eine Lösung/Schnittpunkt gibt. Lösung in einer der beiden Geraden einsetzen.	2
Schnittpunkt zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$	$g_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $g_2: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$	Gleichsetzen $5 + 2s = 1 + 2r$ $5 + s = 3 + 3r$ $2 + s = 5 + 5r$ $2s - 2r = -4$ $s - 3r = -2$ $s - 5r = 3$	3
Punktprobe in Gerade $\mathbb{R}^2$	$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	Gleichsetzen und schauen, ob für r in jeder Zeile der gleiche Wert rauskommt. $1 = 1 + 2r \quad -1 \Rightarrow 0 = 2r \Rightarrow r = 0$ $2 = 2 + 3r \quad -2 \Rightarrow 0 = 3r \Rightarrow r = 0$ Punkt liegt auf der Geraden.	
Punktprobe in Gerade $\mathbb{R}^3$	$A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $g_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$2 = 5 + 2s \Rightarrow -3 = 2s$ $3 = 5 + s \Rightarrow -2 = s$ $5 = 2 + s \Rightarrow 3 = s$ Punkt liegt also nicht auf der Geraden.	
Punktprobe in Ebene	$A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $E_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	Gleichsetzen und schauen, ob für r und s in jeder Zeile der gleiche Wert rauskommt.	3

		$\begin{aligned} 2 &= 1 + 2r + 7s \\ 3 &= 3 + 3r + 3s \\ 5 &= 5 + 5r + 7s \end{aligned}$ $\begin{aligned} 2r + 7s &= 1 \\ 3r + 3s &= 0 \\ 5r + 7s &= 0 \end{aligned}$ Der Punkt liegt also nicht in der Ebene	
Schnittpunkte Gerade Ebene	$g_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} 5 + 2s &= 2 + 2r + 3t \\ 5 + 1s &= 3 + 3r + 2t \\ 2 + s &= 5 + 2r + 5t \end{aligned}$ $\begin{aligned} 2s - 2r - 3t &= -3 \\ 1s - 3r - 2t &= -2 \\ s - 2r - 5t &= 3 \end{aligned}$ s ausrechnen und in die Gerade einsetzen.	2
Schnittpunkte zweier Ebenen	$E_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $E_2: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{aligned} 1 + 2r + 7s &= 2 + 2t + 3u \\ 3 + 3r + 3s &= 3 + 3t + 2u \\ 5 + 5r + 7s &= 5 + 2t + 5u \end{aligned}$ $\begin{aligned} 2r + 7s - 2t - 3u &= 1 \\ 3r + 3s - 3t - 2u &= 0 \\ 5r + 7s - 2t - 5u &= 0 \end{aligned}$ r in Abhängigkeit von s ausrechnen und in die erste Ebene einsetzen oder t in Abhängigkeit von u ausrechnen und in die zweite Ebene einsetzen.	1